AGENDA 2030

Leggere i dati del contagio 2
La velocità dei contagi

3 SALUTE E BENESSERE

Nota alla lettura. Questo è il secondo di tre articoli dell'autore Claudio Romeni che mostra come la matematica ci aiuti a interpretare i dati di una pandemia e di conseguenza il suo andamento. Gli articoli sono stati scritti pensando a un percorso di livello crescente ed è consigliabile leggerli in ordine, tuttavia ogni articolo può essere affrontato in maniera indipendente dagli altri. In questo articolo, si sfrutta la matematica delle derivate senza però parlarne mai esplicitamente o facendo uso della relativa teoria.

Oltre ai nuovi positivi del giorno, l'altro dato che caratterizza l'epidemia è il **numero totale dei casi $N(t)$**, cioè il numero totale di contagiati diagnosticati dall'inizio dell'epidemia fino al giorno in oggetto. Per esempio, il totale dei casi $N(4)$ del giorno 4 è uguale alla somma dei nuovi positivi $n(1)$ del giorno 1 e di quelli dei giorni 2, 3 e 4

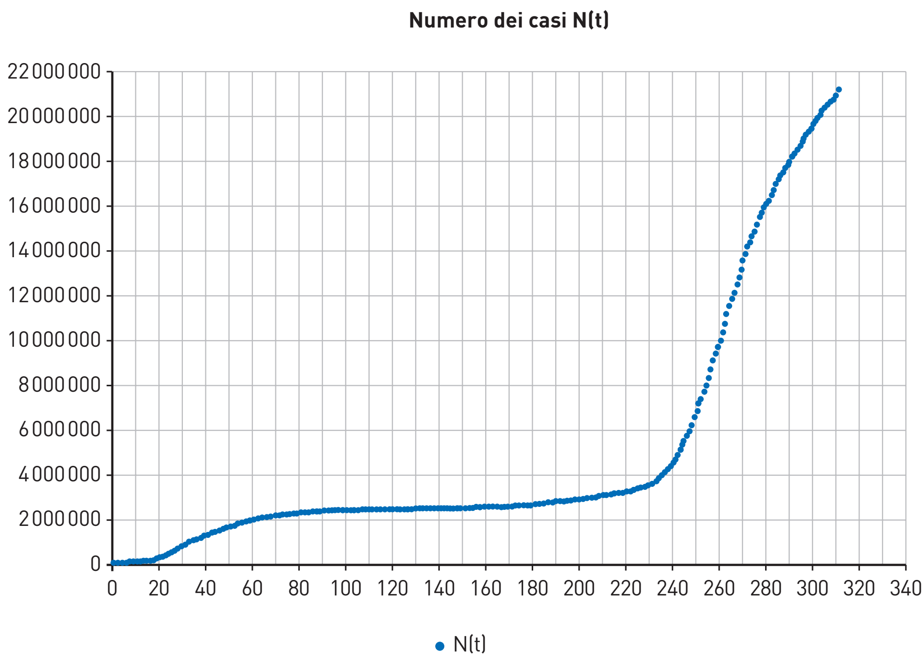
$$N(4) = n(1) + n(2) + n(3) + n(4)$$

In un dato giorno t, il totale dei casi $N(t)$ fino a quel giorno è la somma dei nuovi positivi registrati dal giorno 1 fino al giorno t

$$N(t) = n(1) + n(2) + ... + n(\mathrm{t})$$

Se per ogni giorno t calcoliamo il totale dei casi $N(t)$ e poi rappresentiamo $N(t)$ in funzione del tempo, otteniamo un grafico come il seguente, che ha in ascissa i giorni numerati progressivamente a partire dal giorno 0, cioè dal 23 febbraio 2020, e in ordinata il numero totale dei casi calcolato $N(t)$.

È bene osservare che stiamo parlando di numero totale dei casi $N(t)$ calcolato, cioè stiamo pensando di calcolare $N(t)$ a partire dal numero di nuovi positivi $n(t)$ pubblicato dalla protezione civile, per esempio utilizzando un foglio elettronico. Facciamo questa osservazione perché in effetti nella tabella dei dati della protezione civile è presente anche una colonna *totale_casi*, ma il dato riportato in questa colonna non è sempre uguale al valore $N(t)$ del numero dei casi calcolato come somma dei nuovi positivi $n(t)$. Probabilmente ciò è dovuto a qualche variazione intervenuta nelle metodologie adottate per i conteggi. In ogni caso, le differenze tra i due dati sono piccole, quindi un grafico dei dati della colonna *totale_casi* sarebbe sostanzialmente indistinguibile dal grafico di $N(t)$.
Osserviamo infine che parlare di numero totale dei casi al giorno t è diverso dal parlare di numero totale dei positivi al giorno t. Il numero totale dei positivi fino al giorno t, infatti si ottiene sottraendo al numero totale dei casi fino al giorno t, $N(t)$, il numero totale dei dimessi/guariti fino al giorno t e il numero totale dei deceduti fino al giorno t.



Il grafico di $N(t)$ è un insieme discreto di punti, che rappresenta la funzione

$$N(t)\text{: } \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

dove **A** (insieme dei numeri progressivi t dei giorni dopo il 23 febbraio) e **B** (insieme dei numeri N di casi totali) sono due sottoinsiemi dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

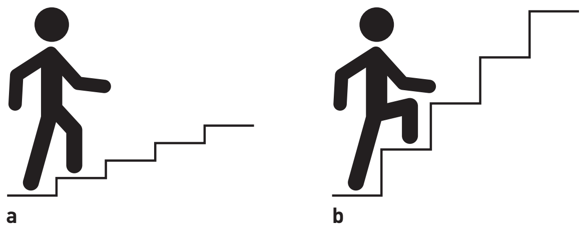
Il numero totale dei casi $N(t)$ *può solamente crescere*, perché è una somma di addendi, i nuovi positivi, che sono sempre maggiori di zero. In altri termini, fino a quando ci sono nuovi contagi, il totale dei casi in un giorno è sempre maggiore del totale dei casi registrato in un qualsiasi giorno precedente.
Quindi, durante l'epidemia, $N(t)$ è una funzione *strettamente crescente*: se il giorno t_2 viene dopo il giorno t_1, allora $N(t_2)$ è maggiore di $N(t_1)$.

Lettura del grafico Il totale dei casi in funzione del tempo

- Per verificare che $N(t)$ è una funzione strettamente crescente, scegliamo due giorni qualsiasi nell'asse orizzontale e leggiamo nell'asse verticale i valori corrispondenti di $N(t)$: accade sempre che, tra i due valori di $N(t)$, il valore maggiore è quello del giorno più avanti. Per esempio, se scegliamo $t_1 = 60$ e $t_2 = 260$, nel grafico leggiamo $N(60) = 200\,000$ e $N(260) = 1\,000\,000$.
- Rispetto al grafico dei nuovi positivi del giorno $n(t)$, l'andamento di $N(t)$ sembra più regolare. Una delle ragioni è che il valore assoluto della fluttuazione dei nuovi positivi di un dato giorno è piccolo rispetto al numero totale dei casi registrati fino a quel giorno.
- Se scorriamo il grafico da sinistra a destra, nel verso del tempo crescente, distinguiamo tre fasi dell'epidemia: una fase iniziale (i punti *salgono*), una fase centrale (i punti si dispongono quasi in orizzontale) e una fase finale (i punti *salgono* nuovamente in modo deciso, con una salita più ripida rispetto alla fase iniziale, ma la salita si addolcisce un poco dopo il giorno 260).

LA SCALINATA DELL'EPIDEMIA

Per valutare in termini intuitivi l'andamento dell'epidemia, pensiamo all'insieme dei punti del grafico di $N(t)$ come a una scalinata in cui gli scalini hanno tutti la stessa profondità (in architettura viene detta *pedata*).
Immaginiamo di muoverci sulla scalinata verso destra, cioè nel verso in cui aumenta il tempo nel grafico: a parità di *pedata*, più gli scalini sono alti (più è grande l'*alzata*), maggiore è la *ripidità* della scalinata, cioè maggiore è la sua *pendenza*.

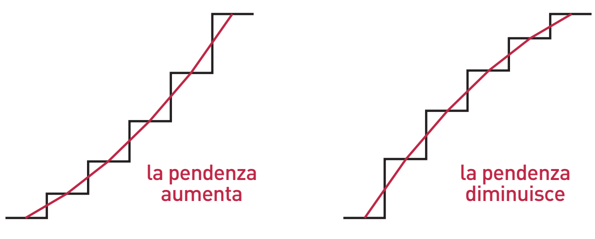


In un dato giorno t, l'altezza di ogni scalino dipende dal numero $n(t)$ di nuovi positivi del giorno prima: lo scalino è tanto più alto quanto maggiore è $n(t)$.

Quindi la pendenza della scalinata è grande nei giorni in cui i nuovi positivi sono tanti e piccola nei giorni in cui i nuovi positivi sono pochi. Di conseguenza, il totale dei contagi

- aumenta più velocemente quando la pendenza della scalinata dei nuovi positivi aumenta;
- aumenta più lentamente quando la pendenza della scalinata dei nuovi positivi diminuisce.

La scalinata del totale dei contagi, comunque, è sempre in salita, come suggerisce la figura seguente



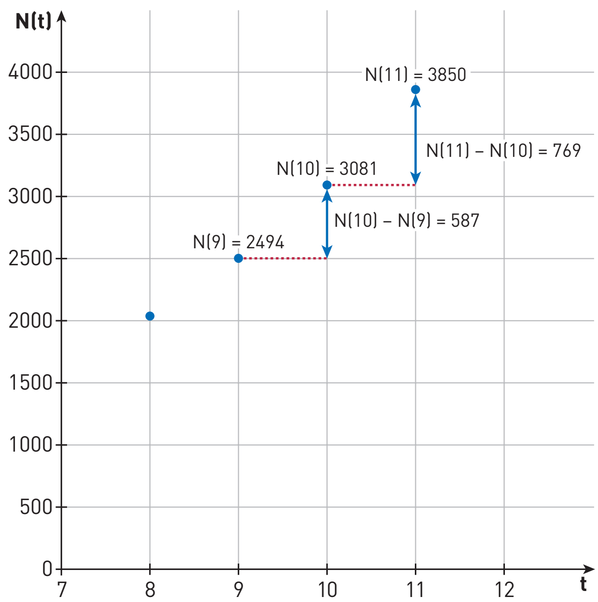
$N(t)$ aumenta più velocemente $N(t)$ aumenta più lentamente

Lettura del grafico Le tre fasi dell'epidemia

- Nella prima fase (febbraio-maggio, giorni 1-100), la pendenza di $N(t)$ aumenta dal giorno 1 fino circa al 30° giorno: il numero totale dei casi $N(t)$ cresce in modo progressivamente più veloce, dunque l'epidemia si sviluppa sempre più velocemente. Dal 30° giorno fino circa al 100° giorno la pendenza di $N(t)$ diminuisce: il numero totale dei casi $N(t)$ continua a crescere, però in modo progressivamente più lento, dunque l'epidemia rallenta, ma non termina.
- Nella fase estiva (giugno-settembre, giorni 100-200) la pendenza di $N(t)$ è molto piccola, i punti del grafico si alzano di poco rispetto all'orizzontale. L'epidemia sembra sotto controllo, perché il totale dei contagi cresce molto lentamente. Comunque già nella seconda metà di agosto (dal giorno 180 in poi) si osserva un aumento della pendenza di $N(t)$.
- Nei mesi di ottobre, novembre e dicembre (dal giorno 220 al giorno 312) la pendenza di $N(t)$ dapprima aumenta decisamente sempre più (fino circa alla metà di novembre, giorno 260), poi diminuisce, con qualche fluttuazione fino alla fine della serie (31 dicembre 2020, giorno 312). Dunque il totale dei contagi cresce in modo progressivamente più veloce dal giorno 220 fino circa al giorno 260, e poi cresce ancora, ma con una crescita progressivamente rallentata, fino alla fine della serie.

LA PENDENZA DEL TOTALE DEI POSITIVI

Continuiamo con l'analogia della scalinata per scoprire il legame tra il grafico di $N(t)$, totale dei casi di contagio, e il grafico di $n(t)$, nuovi positivi del giorno prima. Consideriamo per esempio i giorni 9 e 10: la differenza $N(10) - N(9)$ è l'altezza dello scalino associato al giorno 10. In generale, l'altezza dello scalino nel giorno t è $N(t) - N(t-1)$. Poiché gli scalini hanno tutti la stessa profondità, pari a 1 giorno, la pendenza della scalinata dipende solo dall'altezza dello scalino.



Definiamo *pendenza* dello scalino del giorno t il rapporto tra l'altezza e la profondità dello scalino, cioè:

$$\textit{pendenza nel giorno } t = \frac{N(t) - N(t-1)}{1 \textit{ giorno}}$$

Prestiamo attenzione alle unità di misura: dato che $N(t) - N(t-1)$ è la differenza tra i numeri di casi totali nel giorno t e nel giorno $t-1$(e quindi è un numero), la pendenza è il numero di casi al giorno, cioè la sua unità di misura è casi/giorno (quindi un numero diviso un tempo).

Nello scalino relativo al giorno 10, la pendenza è

$$\textit{pendenza nel giorno } 10 = \frac{N(10) - N(9)}{1 \textit{ giorno}} = \frac{3081 \textit{ casi} - 2494 \textit{ casi}}{1 \textit{ giorno}} = 587 \textit{ casi/giorno}$$

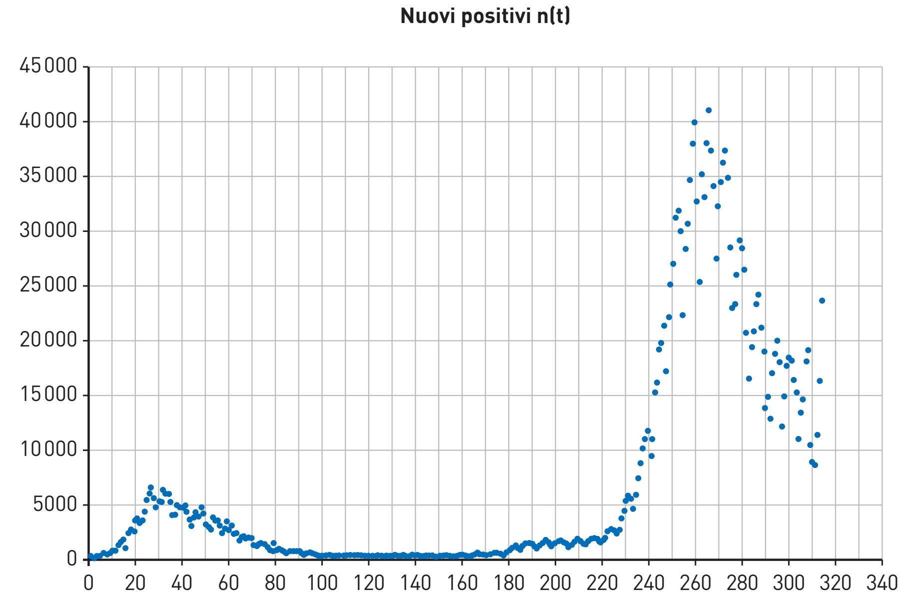
In effetti 587 è il numero dei nuovi positivi giornalieri comunicato dalla Protezione Civile il giorno 10 (4 marzo 2020).

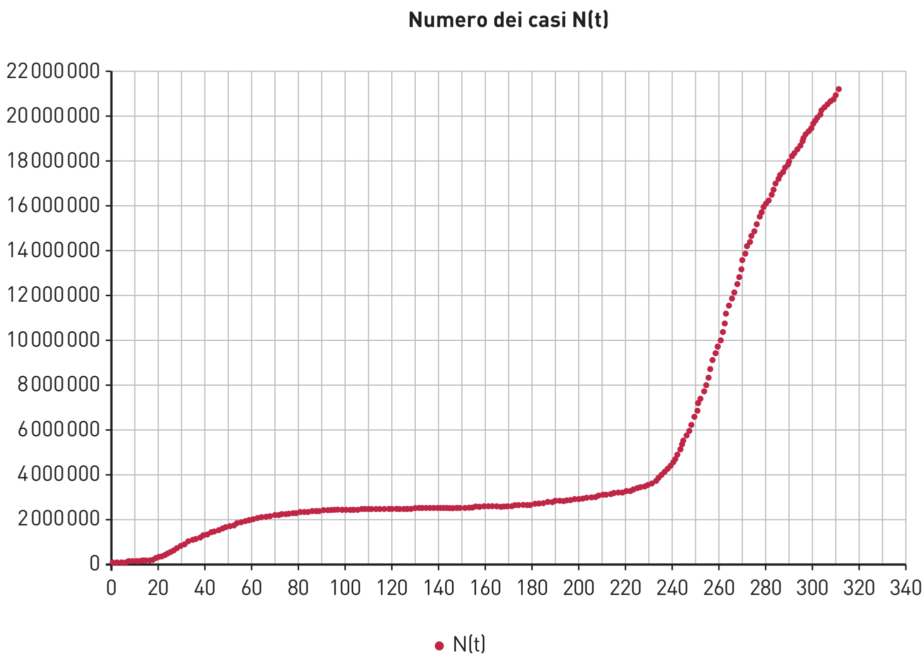
In generale il numero di nuovi positivi al giorno t

$$n(t) = \frac{N(t) - N(t-1)}{1 \; giorno}$$

è la pendenza di $N(t)$ nel giorno t e si misura in casi/giorno.

Abbiamo dunque evidenziato un legame matematico fra $N(t)$ e $n(t)$. Ci aspettiamo che esista un legame fra il grafico di $N(t)$ e quello di $n(t)$, per cui tracciamo i due grafici uno sotto l'altro (sottolineiamo che le scale sugli assi verticali sono diverse).





Lettura del grafico C'è un legame fra $N(t)$ e $n(t)$?

- $N(t)$ ha una grande pendenza quando $n(t)$ è grande. Ciò accade per esempio nei primi 30 giorni dell'epidemia e dai primi di ottobre 2020 (giorno 220).
- $N(t)$ ha una piccola pendenza quando $n(t)$ è piccolo come, per esempio, nei mesi estivi (giorni 100-180).
- $N(t)$ è una funzione strettamente crescente perché $n(t)$, e quindi la pendenza di $N(t)$, è sempre positiva. Solo quando non ci saranno più casi, la pendenza di $N(t)$ sarà uguale a zero.

Il numero dei nuovi positivi $n(t)$ ci dà informazione sulla rapidità con cui aumentano i casi totali $N(t)$:

- se $n(t)$ è grande, la pendenza di $N(t)$ è grande; quindi $N(t)$ aumenta più velocemente (scalino più ripido);
- se $n(t)$ è piccolo, la pendenza di $N(t)$ è piccola: quindi $N(t)$ aumenta più lentamente (scalino meno ripido).

IL CRUSCOTTO DEL CONTAGIO

I casi totali aumentano, la velocità dell'epidemia è grande: affermazioni del genere sono spesso usate per illustrare l'andamento dell'epidemia. In effetti, quando valutiamo una grandezza che cambia nel tempo, prendiamo in esame due aspetti del processo:

- *quanto* la grandezza è cambiata dall'inizio;
- *quanto velocemente* la grandezza cambia in un certo intervallo di tempo.

C'è un'analogia con il moto di un'automobile che percorre una strada dritta:

- *quanto* è cambiata la posizione del corpo dall'inizio è lo s*postamento totale* che l'automobile ha compiuto dalla posizione iniziale;
- *quantovelocemente* l'automobile si sposta, cioè quanto cambia la sua posizione in un intervallo di tempo Δt, è la *velocità media* dell'automobile in quell'intervallo di tempo Δt.

Nel caso dell'epidemia di COVID-19, indichiamo con $t = 0$ il giorno precedente alla prima registrazione di casi positivi. In quel giorno il numero totale dei casi noti era nullo, quindi poniamo $N(0) = 0$. In analogia con il moto dell'automobile, interpretiamo le due grandezze $N(t)$ e $n(t)$ relative all'epidemia:

- *quanti* casi ci sono stati dall'inizio dell'epidemia è dato da $N(t)$, che si misura in *casi*;
- *quanto velocemente* aumentano i positivi in un giorno t è dato da $n(t) = \dfrac{N(t) - N(t-1)}{1\ giorno}$, che si misura in casi al giorno (casi/giorno).

Il numero $n(t)$ esprime quindi la *velocità* del numero di nuovi casi nel giorno t, cioè la velocità del contagio.
In analogia al cruscotto di un'auto, possiamo immaginare un *cruscotto dell'epidemia*, in cui la lancetta del tachimetro indica i nuovi positivi al giorno, il contakilometri i casi totali e l'orologio i giorni trascorsi dall'inizio dell'epidemia.