

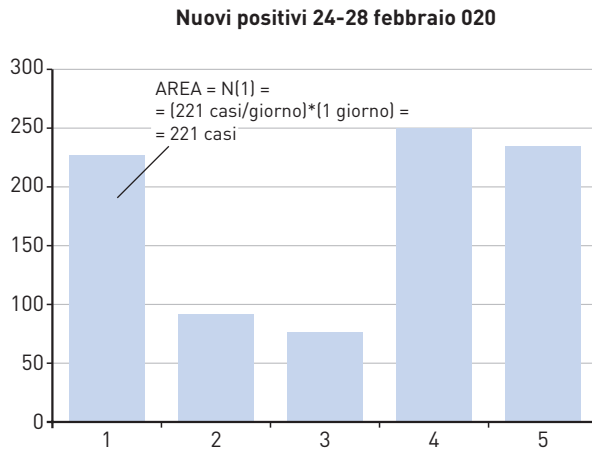


Leggere i dati del contagio 3 La velocità dei contagi



Nota alla lettura. Questo è il terzo di tre articoli dell'autore Claudio Romeni che mostra come la matematica ci aiuti a interpretare i dati di una pandemia e di conseguenza il suo andamento. Gli articoli sono stati scritti pensando a un percorso di livello crescente ed è consigliabile leggerli in ordine, tuttavia ogni articolo può essere affrontato in maniera indipendente dagli altri. In questo articolo, si sfrutta la matematica degli integrali.

Il totale dei positivi è l'integrale dei nuovi positivi e i nuovi positivi sono la derivata del totale dei positivi
 Come abbiamo visto nel post precedente, il totale dei casi $N(t)$ si ottiene dai nuovi positivi giornalieri $n(t)$ facendo una somma. Vediamo ora come possiamo ottenere $N(t)$ a partire dal grafico di $n(t)$.
 Per semplicità, rappresentiamo i dati relativi ai nuovi positivi nei primi 5 giorni di rilevamento mediante un istogramma, in cui le classi hanno la stessa ampiezza di 1 giorno:



I casi totali in un dato giorno (per esempio, il primo) sono

$$N(1) = n(1) \cdot (1 \text{ giorno}) = (221 \text{ casi/giorno}) \cdot (1 \text{ giorno}) = 221 \text{ casi}$$

Notiamo che $N(1)$ è l'area della barra rettangolare di altezza (221 casi/giorno) e base 1 giorno.

I casi totali registrati nei primi 2 giorni sono dati dalla somma delle aree delle prime due barre:

$$\begin{aligned} N(2) &= n(1) \cdot (1 \text{ giorno}) + n(2) \cdot (1 \text{ giorno}) = \\ &= (221 \text{ casi/giorno}) \cdot (1 \text{ giorno}) + (93 \text{ casi/giorno}) \cdot (1 \text{ giorno}) = 314 \text{ casi.} \end{aligned}$$

In generale:

il numero totale di casi nei primi k giorni è dato dall'area complessiva delle barre corrispondenti ai giorni in esame (cioè ai giorni dal giorno 1 al giorno k)

Riprendendo anche quanto visto nel post precedente, abbiamo individuato due proprietà che legano $n(t)$ (numero dei nuovi casi giornalieri) e $N(t)$ (numero dei casi complessivi):

- il numero di casi totali registrati fino al giorno t , $N(t)$, è l'area individuata dal grafico di $n(t)$ tra il giorno 0 e il giorno t ;
- il numero di nuovi positivi al giorno t , $n(t)$, è la pendenza del grafico di $N(t)$ nel giorno t .

Nel linguaggio delle funzioni, il calcolo dell'area al di sotto del grafico di una funzione è legato al calcolo degli **integrali**, e il calcolo della pendenza di un grafico è legato al calcolo delle **derivate**.

Possiamo quindi pensare di descrivere l'andamento dell'epidemia utilizzando le funzioni, gli integrali e le derivate.

In particolare se $n(t)$ fosse una funzione continua, potremmo formulare la prima delle proprietà precedenti nel linguaggio del calcolo integrale:

il numero di casi totali registrati fino al giorno T è l'integrale definito dei nuovi positivi calcolato fra $t = 0$ e $t = T$

$$N(T) = \int_0^T n(t) dt$$

In realtà non possiamo procedere in modo così diretto, perché $n(t)$ e $N(t)$ sono funzioni definite nell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} e non nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , e quindi non possiamo pensare di applicare i concetti di funzione continua, derivata e integrale.

Possiamo però superare l'ostacolo considerando che la variabile t vari nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} (e non dei numeri naturali \mathbb{N}) e cercando una funzione $c(t)$ continua e derivabile che approssimi $n(t)$. L'integrale di questa funzione $c(t)$ fra $t = 0$ e $t = T$ approssimerà il numero totale dei positivi al giorno T .

UNA FUNZIONE CONTINUA CHE APPROSSIMA I NUOVI POSITIVI

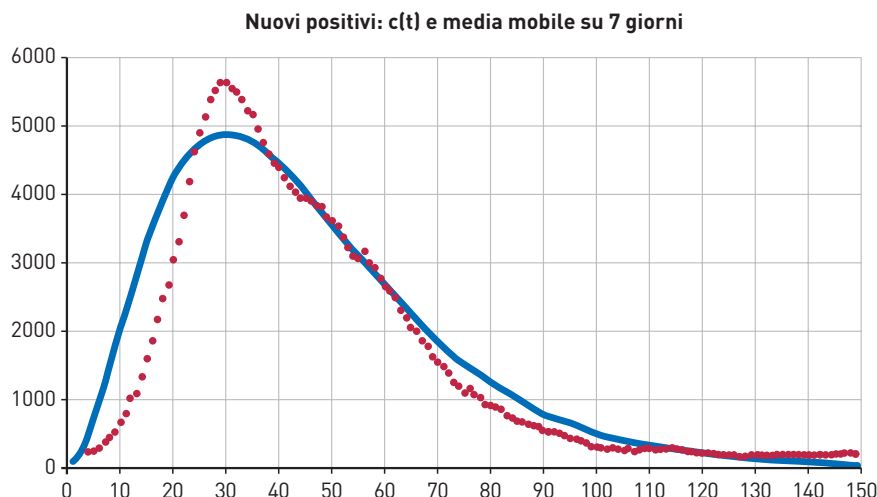
Il grafico della funzione continua e derivabile $c(t)$ deve seguire il più possibile l'andamento del grafico dei nuovi positivi $n(t)$, riproducendone l'evoluzione nel tempo. Inoltre la sua espressione analitica dovrebbe essere abbastanza semplice, in modo che il calcolo della derivata e dell'integrale non risultino troppo laboriosi. Scegliamo di limitarci a descrivere i primi 150 giorni dell'epidemia, cioè di fare variare la variabile reale t in $[0; 150]$, e prendiamo come funzione $c(t): [0; 150] \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ la funzione

$$c(t) = 40t^2 e^{-\frac{t}{15}}$$

Il numero c di nuovi positivi è espresso in *casi/giorno*. Quindi

- l'unità di misura del fattore 40 è *casi/giorno*³, in modo che il prodotto $(40 \text{ casi/giorno}^3)(t \text{ giorni})^2$ si esprima in *casi/giorno*;
- l'unità di misura del denominatore 15 che compare all'esponente è *giorni*, in modo che l'argomento dell'esponentiale sia un numero privo di dimensioni.

Per semplicità, nel seguito omettiamo le unità di misura. Il diagramma riporta il grafico della funzione $c(t)$ (curva continua blu) e il grafico dei nuovi positivi $n(t)$ (punti rossi) espresso come media mobile su 7 giorni.



Letture del grafico Da $n(t)$ a $c(t)$

- Il grafico di $c(t)$ riproduce in modo approssimato l'andamento di $n(t)$. Non può sostituirsi al grafico originale, ma ne coglie alcuni aspetti importanti.
- $c(t)$ cresce rapidamente fino al valore massimo, raggiunto dopo circa 30 giorni dall'inizio dell'epidemia, poi decresce con minore rapidità e tende ad annullarsi.
- $c(t)$ è una funzione reale di variabile reale ed è continua e derivabile in ogni punto, per cui ha senso calcolarne la derivata prima e l'integrale definito.

L'INTEGRALE DEI NUOVI POSITIVI DEI PRIMI 150 GIORNI

Dopo aver sostituito l'insieme di punti discreto della funzione $n(t)$ con la funzione continua $c(t)$ vogliamo approssimare la funzione discreta $N(t)$ del totale dei casi con una funzione continua $C(t)$. Come abbiamo visto nel caso della funzione discreta dei nuovi positivi $n(t)$, il numero totale di casi nei primi T giorni, $N(T)$, è dato dalla somma delle aree delle barre corrispondenti ai giorni in esame. La stessa proprietà vale nel caso della funzione continua $c(t)$, che approssima $n(t)$ ed è maggiore o uguale a 0 per ogni $t \in [0, 150]$:

il numero totale di casi $C(T)$ nei primi T giorni è dato dall'area al di sotto del grafico della funzione $c(t)$ dei nuovi positivi da 0 a T , cioè dall'area della regione di piano delimitata dall'asse orizzontale t , dalle rette verticali $t = 0$ e $t = T$ e dal grafico di $c(t)$. Per definizione tale area è data dall'integrale definito

$$C(T) = \int_0^T c(t) dt$$

Pertanto:

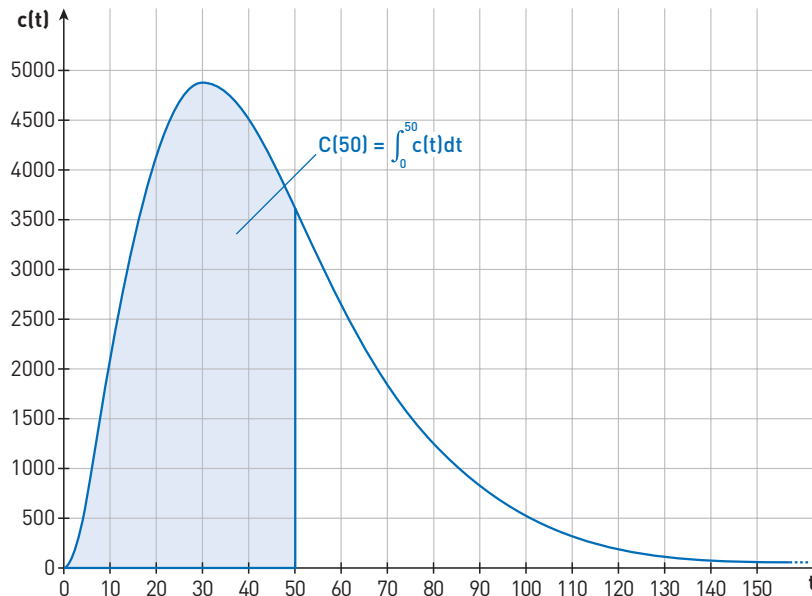
il numero $C(T)$ di casi totali registrati fino al giorno T è l'integrale definito dei nuovi positivi $c(t)$ calcolato da 0 a T .

Per indicare il generico istante di tempo usiamo la variabile t , per cui chiamiamo t il secondo estremo dell'integrale precedente (considerato variabile), e scriviamo la funzione che esprime il totale dei casi al variare del tempo t come la funzione integrale $C(t) = \int_0^t c(x) dx$.

Dato che conosciamo l'espressione analitica della funzione $c(t)$ possiamo calcolare l'integrale e scrivere l'espressione analitica di $C(t)$ nel modo seguente

$$C(t) = \int_0^t c(x) dx = \int_0^t 40t^2 e^{-\frac{x}{15}} dx = 270000 - 600(t^2 + 30t + 450)e^{-\frac{t}{15}}$$

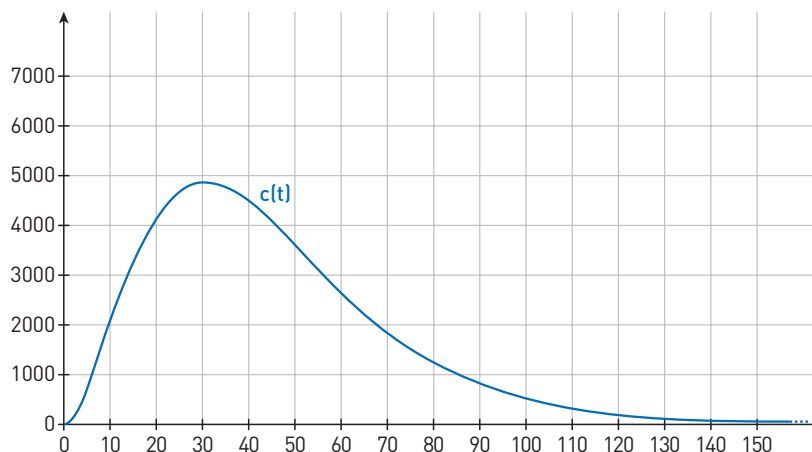
L'interpretazione geometrica mostrata nel grafico fa capire il legame tra le due nuove funzioni.

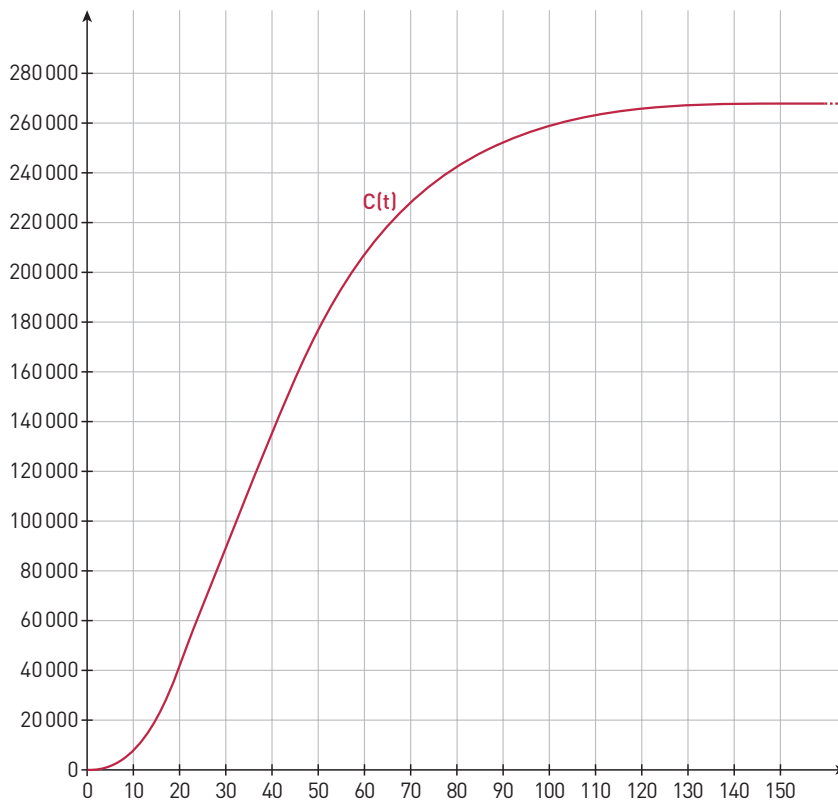


Letture del grafico Dai nuovi positivi $c(t)$ al totale dei casi $C(t)$

- $C(50)$ è un numero che esprime l'area delimitata dal grafico di $c(t)$ tra $t = 0$ e $t = 50$.
- L'area $C(t)$ è una funzione: al variare di t , estremo superiore dell'intervallo di integrazione, restituisce l'area delimitata dal grafico di $c(t)$ nell'intervallo $[0; t]$ e quindi il numero totale dei casi fino all'istante t .
- $c(t)$ è per ipotesi una funzione continua derivabile, e anche $C(t)$, essendo definita come una funzione integrale, è una funzione derivabile e quindi anche continua.

Abbiamo dunque scoperto un legame fra $c(t)$ e $C(t)$. Ci aspettiamo che esista un legame fra il grafico di $c(t)$ e quello di $C(t)$, per cui tracciamo i due grafici uno sotto l'altro (le scale sugli assi verticali sono diverse).





Letture del grafico Legami fra i grafici di $c(t)$ e $C(t)$

- Quando $c(t)$ cresce, da $t = 0$ a $t = 30$, $C(t)$ cresce progressivamente sempre più, cioè il numero dei casi totali aumenta sempre più velocemente: l'epidemia accelera. Il grafico di $C(t)$ ha la *concavità* verso l'alto.
- Mentre $c(t)$ decresce, da $t = 30$ a $t = 150$, $C(t)$ cresce progressivamente sempre meno, cioè il numero dei casi totali continua ad aumentare, ma sempre più lentamente: l'epidemia decelera. Il grafico di $C(t)$ ha la *concavità* verso il basso.
- L'accelerazione dell'epidemia è nulla quando $c(t)$ raggiunge il valore massimo, circa per $t = 30$. Il grafico di $C(t)$ ha un *flesso*, cioè cambia concavità, nel punto con quell'ascissa.

L'epidemia può crescere in modi diversi:

- sempre più velocemente, quando la crescita in un giorno è sempre più grande della crescita del giorno prima. L'epidemia accelera e la concavità della curva del totale dei positivi è rivolta verso l'alto;
- sempre più lentamente, quando la crescita in un giorno è sempre più piccola della crescita del giorno prima. L'epidemia decelera e la concavità della curva del totale dei positivi è rivolta verso il basso.

LA DERIVATA DEL TOTALE DEI POSITIVI DÀ I NUOVI POSITIVI

Torniamo all'immagine della scalinata discussa nel post **La velocità dei contagi**, dove il totale dei positivi è una scala e i nuovi positivi sono le altezze degli scalini, che danno la pendenza della scala. Per analogia, nel caso continuo possiamo immaginare che la curva del totale dei positivi sia una strada in salita e che i nuovi positivi siano la pendenza della strada.

Conoscendo il profilo della strada, cioè la funzione $C(t)$, siamo quindi in grado di ottenere l'andamento della pendenza della strada, cioè la funzione $c(t)$. Infatti, da $C(t)$ si può determinare $c(t)$ calcolando una derivata, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale. Secondo questo teorema, poiché $c(t)$ è una funzione continua in $[0; 150]$, allora nello stesso intervallo esiste la derivata prima rispetto a t della sua funzione integrale

$$C(t) = \int_0^t c(x) dx$$

per ogni punto t dell'intervallo $[0; 150]$, e tale derivata è uguale a $c(t)$, cioè

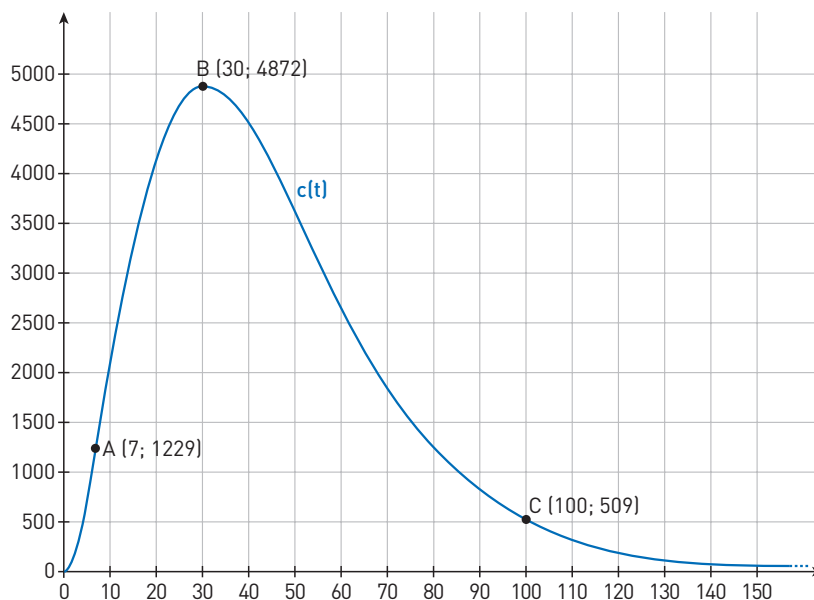
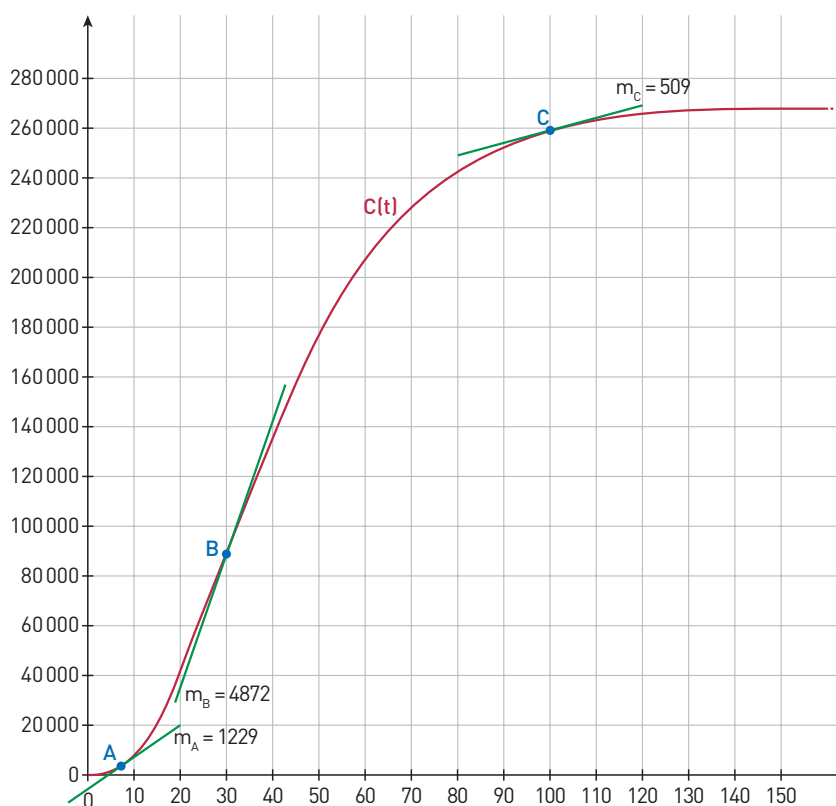
$$C'(t) = c(t).$$

In altri termini:

in ogni istante t , la funzione $c(t)$ assume un valore che è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva $C(t)$, cioè alla pendenza del grafico di $C(t)$, in t .

La seguente tabella sintetizza i legami tra le funzioni $c(t)$ e $C(t)$ e i loro grafici.

Totale dei casi $C(t)$	Nuovi positivi $c(t)$	Relazione	Significato
$C(t) = \int_0^t c(x)dx$		Il totale dei casi al giorno t è l' integrale dei nuovi positivi dal giorno 0 al giorno t .	Il totale dei casi al giorno t è l'area al di sotto del grafico dei nuovi positivi nell'intervallo tra 0 e t .
	$c(t) = C'(t) = \frac{dC(t)}{dt}$	I nuovi positivi al giorno t sono la derivata del totale dei positivi al giorno t .	I nuovi positivi sono la pendenza (il coefficiente angolare) della tangente al grafico del totale dei casi.



Letture del grafico Legami fra i grafici di $C(t)$ e $c(t)$

- Nell'intervallo $[0; 30]$ $C(t)$ è una funzione convessa, cioè il suo grafico rivolge la concavità verso l'alto e la sua pendenza cresce, quindi $c(t)$ cresce. Nel diagramma con il grafico di $C(t)$ sono evidenziati in verde due segmenti di tangente (con i rispettivi coefficienti angolari) al grafico di $C(t)$ nei punti A e B , che hanno ascissa rispettivamente $t = 7$ e $t = 30$. I coefficienti angolari delle due tangenti, m_A e m_B , sono entrambi positivi e $m_B > m_A$.
- Per $t = 30$ il grafico di $C(t)$ cambia concavità: prima la sua pendenza cresce, poi decresce. Quindi $c(t)$ ha un punto di massimo relativo in $t = 30$.
- Per $t > 30$, $C(t)$ è una funzione concava, cioè il suo grafico volge la concavità verso il basso e la sua pendenza diminuisce, quindi $c(t)$ decresce. Nel diagramma è evidenziato in verde il segmento di tangente (con il suo coefficiente angolare) al grafico di $C(t)$ nel punto C di ascissa $t = 100$. Il coefficiente angolare della tangente, m_C , è ancora positivo, ma minore di m_B .

L'epidemia può crescere in modi diversi:

- sempre più velocemente, quando la tangente alla curva del totale dei casi in un giorno è sempre più ripida della tangente del giorno prima. L'epidemia accelera e la curva $c(t)$ dei nuovi positivi cresce;
- sempre più lentamente, quando la tangente alla curva del totale dei casi in un giorno è sempre meno ripida della tangente del giorno prima. L'epidemia decelera e la curva $c(t)$ dei nuovi positivi decresce.

Crescita dell'epidemia	Tangente al grafico di $C(t)$	$c(t)$	Area sotto $c(t)$
Accelera (aumenta sempre più)	Sempre più ripida	È crescente	Cresce ogni giorno di più
Decelera (aumenta sempre meno)	Sempre meno ripida	È decrescente	Cresce ogni giorno di meno
Crescita lineare (a ritmo costante)	Pendenza costante nel tempo	Rimane costante	Cresce ogni giorno con la stessa velocità
Nulla (crescita zero)	Orizzontale	Assume valori nulli	Rimane costante

UN PERIODO DI CRESCITA ESPONENZIALE

Nel mese di ottobre 2020 il termine ricorrente nei mezzi d'informazione a proposito dell'epidemia era *esponenziale*. Nel senso comune questo aggettivo è indefinito, ma ha un marcato alone di pericolosità, in quanto evoca una crescita inarrestabile.

In matematica, si chiama **funzione esponenziale** ogni funzione $f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che

$$f(t) = a^t, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

Frequentemente utilizzata è la funzione esponenziale $f(t) = e^t$, dove $e = 2,71828\dots$ è un particolare numero irrazionale, detto *numero di Nepero*. Fra le proprietà che caratterizzano questa funzione, ricordiamo le seguenti:

- e^t è una funzione strettamente crescente;
- $\frac{de^t}{dt} = e^t$ cioè la pendenza della curva di equazione $y = e^t$ nel suo punto di ascissa t è proprio e^t e quindi, poiché la funzione e^t è crescente, la pendenza aumenta sempre più all'aumentare di t .

Dunque, se il totale dei casi cresce esponenzialmente, anche la sua derivata, i nuovi positivi, cresce esponenzialmente. Questo spiega perché l'espressione *crescita esponenziale* applicata a un'epidemia ha una connotazione così fosca: indica una crescita fuori controllo, in cui non solo i contagi aumentano nel tempo ma lo fanno in modo sempre più rapido.

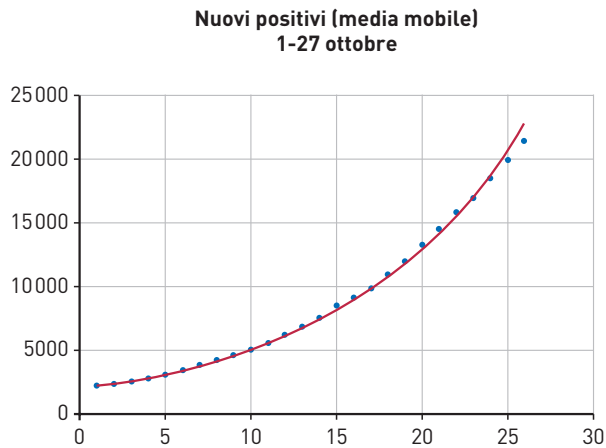
Il grafico mostra l'andamento della media mobile su 7 giorni (punti blu) dei nuovi positivi dal 1 ottobre al 26 ottobre (giorno 26). Per comodità abbiamo cambiato l'origine della scala dei tempi, in modo che il 1 ottobre sia il giorno 1 e il 26 ottobre il giorno 26.

La curva rossa è la **linea di tendenza** calcolata dal foglio elettronico ed è la curva esponenziale che meglio approssima l'andamento dei nuovi positivi.

L'equazione della linea di tendenza calcolata dal foglio elettronico è

$$c_2(t) = 1945e^{0,095t}$$

(Notiamo che i coefficienti numerici di una data linea di tendenza possono cambiare leggermente a seconda della versione del foglio elettronico utilizzato)



Lettura del grafico La crescita esponenziale dei nuovi positivi

- $c_2(t)$ è una funzione esponenziale e riproduce con ottima approssimazione l'andamento dei nuovi positivi: è corretto quindi affermare che la crescita dei nuovi positivi è *esponenziale*.
- La pendenza del grafico di $c_2(t)$ è positiva: i nuovi positivi aumentano nel tempo e $c_2(t)$ è una funzione strettamente crescente.
- La pendenza del grafico di $c_2(t)$ aumenta nel tempo: i nuovi positivi aumentano *sempre più* e $c_2(t)$ è una funzione convessa, o con concavità verso l'alto.

La funzione esponenziale e^t ha un'altra proprietà fondamentale, che enunciamo per l'intervallo $[a, t]$:

- le primitive della funzione esponenziale sono funzioni esponenziali: $\int e^t dt = e^t + c$

Per la formula di Leibniz-Newton

$$\int_a^t e^x dx = e^t - e^a$$

cioè l'area delimitata dal grafico di e^t fra a e t cresce come e^t .

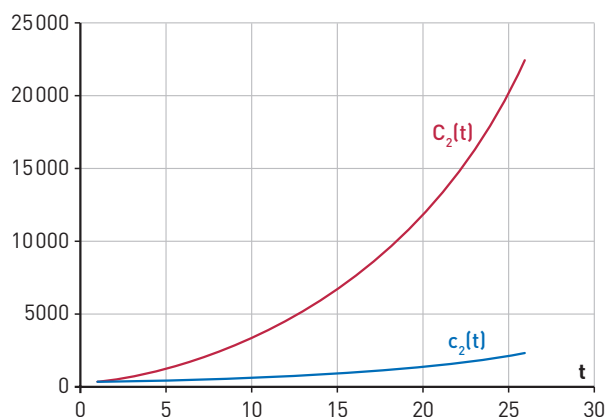
In altri termini: anche l'area al di sotto del grafico della funzione esponenziale cresce in modo esponenziale. Tutto questo è generalizzabile se, invece della funzione e^t consideriamo la funzione e^{kt} , con k costante reale positiva.

Sappiamo che per calcolare i casi totali dobbiamo integrare la funzione che esprime il numero dei nuovi positivi. Dunque se la funzione integranda dei nuovi positivi è la funzione esponenziale $c_2(t) = 1945 e^{0,095t}$, anche la funzione che esprime il totale dei casi $C_2(t)$ è un'esponenziale. Infatti, posto $c_2(1) = 2138$, abbiamo che il totale dei casi $C_2(t)$ (in questo caso calcolati a partire dal giorno 1 ottobre) è

$$C_2(t) = C_2(1) + \int_1^t c_2(x) dx = 2138 + 20474 e^{0,095t} - 22514 = 20474 e^{0,095t} - 20376$$

Visto l'andamento rapidamente crescente delle curve $c_2(t)$ e $C_2(t)$ nel mese di ottobre 2020, non solo è stato ragionevole ma è stato un atto di responsabilità sociale mettere in campo strategie di contenimento del contagio.

Nuovi positivi esponenziale - Totale positivi esponenziale



Letture del grafico La crescita esponenziale del totale dei casi

- $C_2(t)$ è una funzione esponenziale: il totale dei casi cresce esponenzialmente.
- Il totale dei casi aumenta nel tempo: questo non è legato all'andamento esponenziale, ma solo al fatto che il numero dei nuovi positivi è sempre maggiore di zero.
- Il totale dei positivi aumenta sempre più: anche $C_2(t)$ è una funzione convessa, o con concavità verso l'alto.

ESERCIZI PROPOSTI

1 Considera la funzione che dà i nuovi positivi $c(t)$: $[0; 150] \rightarrow A \subset \mathbb{R}$

A Dimostra che la funzione è continua e derivabile.

B Determina l'ascissa del punto di massimo relativo della funzione

$$c(t) = 40t^2 e^{-\frac{t}{15}}.$$

C La funzione ha il massimo assoluto? Spiega perché.

2 È noto che $\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3}(a^2 x^2 + 2ax + 2)e^{-ax} + \text{costante}$.

A Dimostra l'uguaglianza precedente applicando per due volte consecutive il metodo di integrazione per parti.

B Verifica che, se $c(t) = 40t^2 e^{-\frac{t}{15}}$, allora

$$C(t) = \int_0^t c(x) dx = 270000 - 600(t^2 + 30t + 450)e^{-\frac{t}{15}}.$$

3 Considera le funzioni $c(t)$ e $C(t)$ discusse nel testo.

A Verifica che $C'(t) = c(t)$.

B Determina il punto di flesso di $C(t)$.

C Determina gli intervalli in cui $C(t)$:

– cresce sempre più rapidamente;

– cresce sempre meno rapidamente.

4 Dimostra che l'ascissa T del punto di flesso di $C(t)$ è tale che $c'(T) = 0$.

5 Una funzione che approssima l'andamento della funzione discreta dei nuovi positivi $n(t)$ nell'intervallo $[0; 150]$ è

$$c_1(t): [0; 150] \rightarrow A \subset \mathbb{R}$$

$$c_1(t) = 4(t^3 - 3t^2)e^{-0,1t} + 200$$

A Imposta un foglio elettronico in cui inserire, per i primi 150 giorni dell'epidemia:

– una colonna con i nuovi positivi $n(t)$ copiati dal sito della Protezione Civile;

– una colonna in cui sono calcolati i nuovi positivi mediante la funzione $c_1(t)$.

B Inserisci un grafico che mostri l'andamento delle due funzioni $n(t)$ e $c_1(t)$.

6 Considera la funzione $c_1(t)$ introdotta nell'esercizio precedente.

A Determina il punto di massimo assoluto di $c_1(t)$.

B Verifica che il totale dei casi $C_1(t) = \int_0^t c_1(x) dx$ è dato dalla funzione

$$C_1(t) = (-40t^3 - 1080t^2 - 21600t - 216000)e^{-0,1t} + 200t + 216000.$$

- 7** Imposta un foglio elettronico in cui riportare i dati relativi al periodo 1 ottobre 2020 -15 novembre 2020 diffusi dalla Protezione Civile.
- A** Traccia il grafico dei nuovi positivi rappresentando i dati come media mobile su 7 giorni.
- B** Inserisci la linea di tendenza mediante la procedura seguente:
- fai click col tasto destro del mouse su un punto del grafico;
 - seleziona **Aggiungi linea di tendenza**;
 - seleziona **Esponenziale**.
- C** Valuta se la curva di tendenza esponenziale approssima i dati in modo accettabile.
- D** Successivamente seleziona la linea di tendenza **Polinomiale** e modifica **Grado** fino a ottenere un buon adeguamento con i dati reali.
- E** È ragionevole affermare che dai primi di novembre c'è stata una frenata dell'epidemia? Spiega perché.
- 8** Mediante integrazione verifica che, se $c_2(t) = 1945e^{0,095t}$ e $c_2(1) = 2138$, allora

$$C_2(t) = \int_1^t c_2(x) dx = 20474e^{0,095t} - 20376$$

- 9** Il diagramma seguente mostra le funzioni $c(t)$ e $C(t)$ nei primi giorni dell'epidemia. La retta $r(t)$ è la tangente al grafico di $C(t)$ nel punto P di ascissa $t = 10$.
- A** Stima dal grafico il coefficiente angolare m di $r(t)$.
- B** Spiega perché $m = C'(10)$.
- C** Verifica che, con buona approssimazione, $c(10) = C'(10)$.

